الكفاءات
*توظيف الجداء السلمي في حل المسائل الهنسيةالمرتبطة بالمستقيمات و المستويات
*توظيف الجداء السلمي في تعيين مجموعات النقط

الجداء السلمي في الفضاء

1 تذكرة بالجداء السلمي في المستوي.

1-1 العبارات الأربعة للجداء السلمي.
2-1 تعامد شعاعين في المستوي
3-1 المسافة بين نقطة ومستقيم.
4-1 خواص الجداء السلمي .
5-1 أنشطة تحدد فيها استخدامات الجداء السلمي .

تقدم هذه الفقرة من خلال أنشطة مختلفة ، تحدد كل هذه المفاهيم.

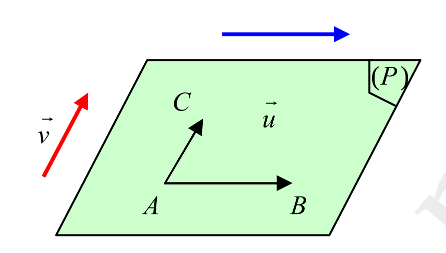
2 الجداء السلمي في الفضاء.

- نشاط أو أنشطة تبرز فيها : المعلم المتعامد المتجانس في الفضاء-احداثيات النقط-المستقيمات و المستويات المتعامدة .....(تذكرة بالسنة الثانية)

1-2 تعريف الجداء السلمي في الفضاء.

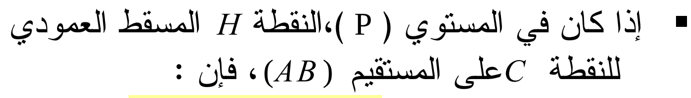
*تعريف: نختار وحدة أطوال في الفضاء . $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء
الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي يرمز له بالرمز $\vec{u}.\vec{v}$
المعرفة بـــ : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$

يمكن أن يقدم التعريف ، بأشكال أخرى

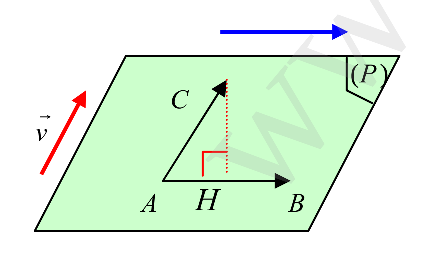


الأشكال ضرورية

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء معناه يوجد مستو (P) يشمل النقط A ، B و C
حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
و منه : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
- إذا كانت α هي القياس الجبري للزاوية بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$
فإن : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\alpha$
نتيجة: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$
- إذا كان في المستوي (P)، النقطة H المسقط العمودي



للنقطة C على المستقيم (AB)، فإن :



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$
- إذا كان : $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن : $\vec{u}.\vec{v} = 0$

2-2 العبارة التحليلية للجداء السلمي .

* مبرهنة : في معلم متعامد متجانس ، إذا كان $\vec{u}(x;y;z)$; $\vec{v}(x';y';z')$
فإن : $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$

البرهان: ....

* المسافة بين نقطتين.

ALOUI-MATH

2-3 خواص .

* مبرهنة : مهما تكن الأشعة $\vec{u};\vec{v};\vec{w}$ و العددين الحقيقيين $a;b$:

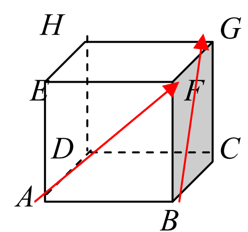
$1.\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{v}$

$2.\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

$3.(a\vec{u}).(b\vec{v})=(ab)\vec{u}.\vec{v}$



2-4 تطبيقات:



1/ احسب القيس α للزاوية الهندسية بين الشعاعين $\overrightarrow{BG}$; $\overrightarrow{AF}$ في المكعب الموضح في الشكل.

2/ $ABCD$ رباعي الوجوه منتظم حرفه a ، كل وجه هو مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a أحسب

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



3/..............................



4/...............................

3 التعامد في الفضاء .



3-1 الشعاعان المتعامدان .

- تعريف : في الفضاء ، يقال عن شعاعين غير معدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، إنهما متعامدان يعني إذا كان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ ، فإن المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.

* $\vec{0}$ عمودي على كل شعاع من الفضاء.

- مبرهنة : 1. يقال أن >> الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، **متعامدان** << يكافئ القول : $\vec{u}.\vec{v}=0$
2. في معلم متعامد متجانس، >> الشعاعان $\vec{u}(x;y;z)$; $\vec{v}(x';y';z')$ متعامدان<<يكافئ : $x.x'+y.y'+z.z'=0$

البرهان:............

3-2 الشعاع الناظمي على مستو.

- تعريف: ....

- مبرهنة :

$\vec{n}$ شعاع غير معدوم . A نقطة من الفضاء
مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$
هي المستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له .

3-3 تطبيقات : 1/ توظيف الجداء السلمي في إثبات أن شعاع ناظمي على مستوي
2/توظيف الجداء السلمي في إثبات تعامد مستقيمين.
3/ توظيف الجداء السلمي في إثبات تعامد مستقيم ومستو

ALOUI-MATH

2

4 المعادلة الديكارتية لمستوي.

4-1 المعادلة الديكارتية لمستوي.

مبرهنة: في معلم متعامد **متجانس**.

1. إذا كان المستوي (P) له شعاع ناظمي $\vec{n}(a;b;c)$ ، فإن المستوي (P) له معادلة ديكارتية بالشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث a، b و c غير معدومة معا، لأن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي .
2. بالعكس فإن مجموعة النقط M(x ; y ; z) التي تحقق : $ax+by+cz+d=0$ حيث a، b و c أعداد حقيقة غير معدومة معا هي مستو و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له.

البرهان :......................

- تطبيقات على كيفية ايجاد معادلة مستو .(معادلة مستو معرف بشعاعين مرتبطين خطيا و نقطة)
- معادلات المستويات الخاصة : $x=0$; $y=0$ و $z=0$ أو الموازية لأحد هذه المستويات.
- شرط تعامد (توازي)مستويين.

4-2 بعد نقطة عن مستو .

مبرهنة: .... $\dfrac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ بعد $A(\alpha;\beta;\gamma)$ عن $ax+by+cz+d=0$

البرهان:.......................

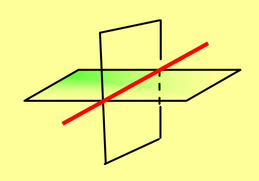
4-3 التمثيل الديكارتي لمستقيم .

مبرهنة (تقبل): $(P_1);(P_2)$ مستويان من الفضاء غير متوازيين معادلتاهما الديكارتية على الترتيب:

$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

مجموعة النقط التي تحقق الجملة :

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

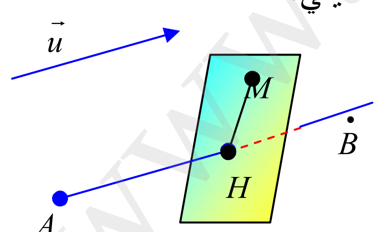


هي مستقيم في الفضاء.

<< جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم >>

4-4 توظيف الجداء السلمي في تعيين مجموعات النقط.

- مجموعة النقط M حيث : $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=k$ ، A نقطة من الفضاء و $\vec{u}$ شعاع غير معدوم، و k عدد حقيقي.



مبرهنة: مجموعة النقط M هي المستوي العمودي على المستقيم (AB) في النقطة H المعرفة كما يلي: $\overline{AB}.\overline{AH}=k$ حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

البرهان:.....

- مجموعة النقط M بحيث : $\alpha MA^2+\beta MB^2=k$ ، k عدد حقيقي.

* نميز حالتين : 1- $\alpha+\beta=0$

2- $\alpha+\beta\neq0$

ALOUI-MATH

5 المستقيمات و المستويات في الفضاء

التركيز على الناحية الجبرية في العمل لنستفيد منها في التفاسير الهندسية

5-1 أنشطة .

- حل جملة ثلاثة معادلات خطية لثلاثة مجاهيل .

مثال1: طريقة التعويض.

مثال2: طريقة غوس(GAUSS) (الجملة المثلثة)

5-2 التمييز المرجحي لمستقيم ، قطعة مستقيمة و مستو :

التعميم في الفضاء

- التذكير بـــ : مرجح n نقطة مثقلة .
- التذكير بـــ: المبرهنة التالية: من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون :

$$a_1\overrightarrow{MA_1}+a_2\overrightarrow{MA_2}+.....+a_n\overrightarrow{MA_n}=(a_1+a_2+.....+a_n)\overrightarrow{MG}$$

- **تذكرة :** * المستقيم (AB) هو مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

*القطعة المستقيمة [AB] هي مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ حيث $t\in[0;1]$.

لإثبات أن 3 نقط على استقامة واحدة ، يمكن إثبات أن إحداها هي مرجح النقطتين الأخر تين

- مبرهنة: A ، B ، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

❶ المستقيم (AB) هو مجموعة مراجيح للنقطتين A ، B

❷ القطعة [AB] هي مجموعة مراجيح للنقطتين A ، B مرفقتين بمعاملين من نفس الإشارة

❸ المستوي (ABC) هو مجموعة مراجيح للنقط A ، B ، C

إذا كانت المعاملات موجبة ، فإن مجموعة المراجيح تكون داخل المثلث ABC. برهن العكس

البرهان : ....

- ملاحظة: << $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$ حيث $t\in\mathbb{R}$ >> يكافئ << M مرجح $(A;1-t);(B;t)$ >>

مثال : $\overrightarrow{AM}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ و منه $t=\frac{5}{2}$ و $1-t=-\frac{3}{2}$ ، إذن M هي مرجح $(A;-\frac{3}{2});(B;\frac{5}{2})$

5-3 التمثيلات الوسيطية.

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

- التمثيل الوسيطي لمستقيم .

*مبرهنة:..................................

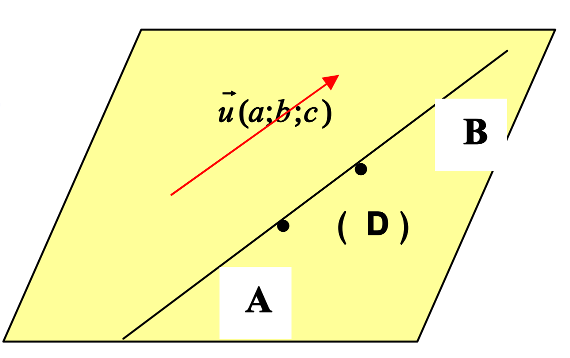
$$(S)\begin{cases}x=at+x_0\\y=bt+y_0 \quad t\in\mathbb{R}\\z=ct+z_0\end{cases}$$

* **ملاحظات :** – الجملة (S) تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم(D) (أو جملة معادلات وسيطية للمستقيم (D)) الذي يشمل النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه له.

– نسمي t بالوسيط .

– في الجملة (S) إذا استبدلنا $t\in\mathbb{R}$ بـــ : $t\in[0;1]$ نجد التمثيل الوسيطي للقطعة المستقيمة [AB] حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

– في الجملة (S) إذا استبدلنا $t\in\mathbb{R}$ بـــ : $t\in[0;+\infty[$ نجد التمثيل الوسيطي انصف المستقيم $[AB)$ حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.



ALOUI-MATH

4

- **التمثيل الوسيطي لمستو : مبرهنة : ....**
- **الانتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم إلى التمثيل الوسيطي له ، و بالعكس .**

* **نكتفي بأمثلة تطبيقية.**

- **الانتقال من معادلة ديكارتية لمستو إلى التمثيل الوسيطي له ، و بالعكس.**

* **نكتفي بأمثلة تطبيقية**

- **شرط تعامد مستقيمين.**
- **شرط تعامد مستقيم ومستو .**
- <u>مسائل</u> الاستقامية لثلاث نقط–انتماء 4 نقط لنفس المستوي

> بالنسبة للعلوم التجريبية نستخدم التمثيلات الوسيطية أما الرياضي و ت.ر نستخدم التمثيلات الوسيطية و التمييز المرجحي

5-4 الأوضاع النسبية و التقاطعات.

- **الوضع النسبي لمستويين :**

* $(P_1);(P_2)$ مستويان من الفضاء ، معادلتاهما الديكارتية على الترتيب:

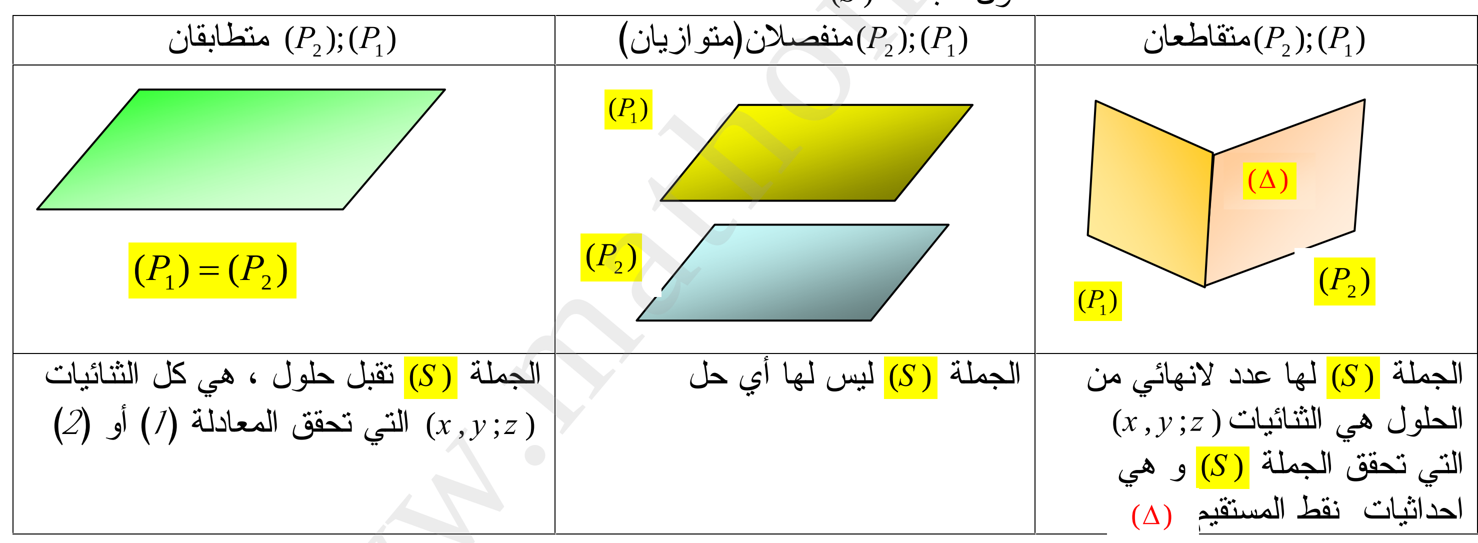
$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad ; \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

يمكن أن نعرف الوضعية النسبية لهذين المستويين من خلال الشعاعان الناظمان لهما ، هل هما مرتبطان خطيا أم لا .

و لتحديد إحداثيات نقط التقاطع في حالة وجودها نقوم بحل جملة المعادلتين:

$$(S)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

الجدول التالي يحدد مختلف الوضعيات للمستويين $(P_1);(P_2)$ ، ويحدد مجموعة حلول الجملة (S)



$(P_1);(P_2)$ متقاطعان	$(P_1);(P_2)$ منفصلان (متوازيان)	$(P_1);(P_2)$ متطابقان
الجملة (S) لها عدد لانهائي من الحلول هي الثنائيات $(x,y;z)$ التي تحقق الجملة (S) و هي احداثيات نقط المستقيم (Δ)	الجملة (S) ليس لها أي حل	الجملة (S) تقبل حلول ، هي كل الثنائيات $(x,y;z)$ التي تحقق المعادلة (1) أو (2)



- **الوضع النسبي لمستو و مستقيم :**

(P) **مستو** معادلته $ax + by + cz + d = 0$ و منه له شعاع ناظم هو $\vec{n}(a;b;c)$.

(D) مستقيم له شعاع توجيه هو $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ و يشمل النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$

يمكن التعرف على الوضعية بين المستوي (P) و المستقيم (D) من الشعاعان $\vec{n}(a;b;c)$ $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ هل هما متعامدان أم لا ؟

و لتحديد إحداثيات نقط التقاطع في حالة وجودها نقوم بحل الجملة (S) التالية :

$$(S)\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

ALOUI-MATH

*الجدول التالي يحدد مختلف الوضعيات.

(D) و (P) منفصلان	(D) محتوى في (P)	(D) و (P) متقاطعان في I
(D) (P)	(D) (P)	(D) (P) I
الجملة (S) ليس لها أي حل	الجملة (S) لها عدد لانهائي من الحلول هي إحداثيات المستقيم (D)	الجملة (S) لها حل وحيد هو إحداثيات النقطة I

الوضع النسبي لمستقيمين :

(D) مستقيم يشمل النقطة $A_1(x_1;y_1;z_1)$ و $\vec{u}(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ شعاع توجيه له، و (D') مستقيم آحر يشمل النقطة $A_2(x_2;y_2;z_2)$ و $\vec{u'}(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ شعاع توجيه له

يمكن التعرف على الوضعية بين (D) و (D') من خلال شعاع توجيه كل منهما ،

*إذا كان $\vec{u}(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ و $\vec{u'}(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ مرتبطين خطيا فإن (D) و (D') إما متوازين و إما متطابقين.

* إذا كان $\vec{u}(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ و $\vec{u'}(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ غير مرتبطين خطيا فإن (D) و (D') إما متقاطعين في نقطة واحدة و إما منفصلين (في مستويين مختلفين) .

و لتحديد التقاطع نستخدم الجمل الوسيطية لكل منهما.

$\vec{u}(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ و $\vec{u'}(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ مرتبطين خطيا		$\vec{u}(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ و $\vec{u'}(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ غير مرتبطين خطيا	
(D) و (D') من نفس المستوي		(D) و (D') من نفس المستوي	(D) و (D') من مستويين مختلفين
متوازيين و مختلفين	**منطبقين**	**متقاطعين في نقطة واحدة**	منفصلين
(D) (D')	(D) (D')	(D) (D')	(D) (D')
الجملة ليس لها حل	**الجملة لها عدد لانهائي من الحلول**	**الجملة لها حل واحد**	**الجملة ليس لها حل**

ALOUI-MATH

5-5 تقاطع ثلاثة مستويات

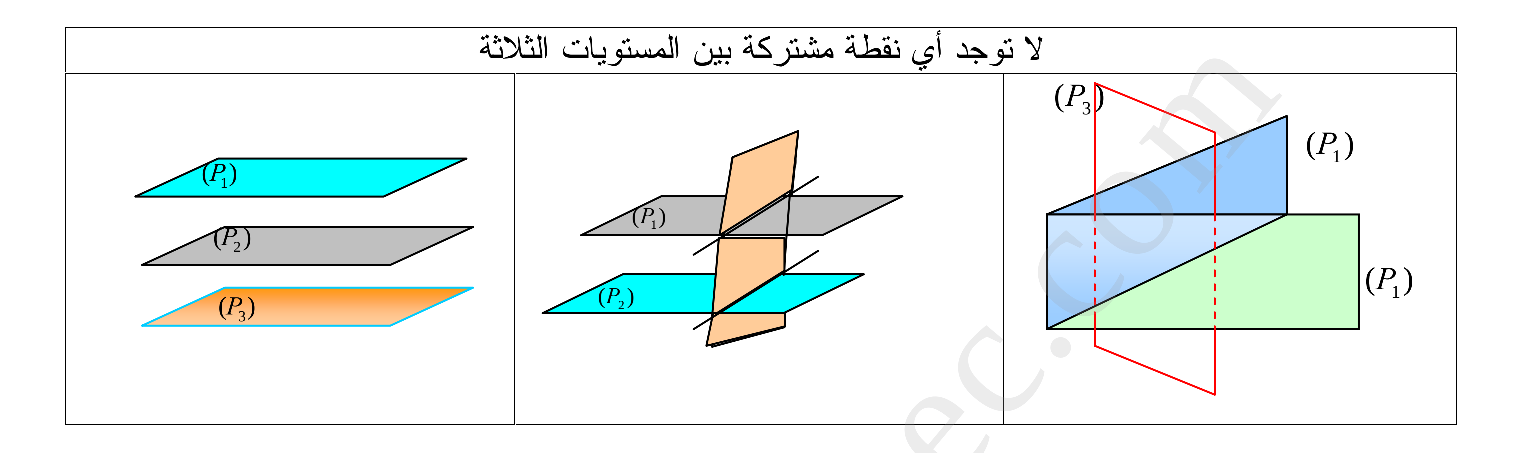
(P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات $\overrightarrow{n_1}$ ، $\overrightarrow{n_2}$ ، $\overrightarrow{n_3}$ أشعة ناظمية لها .

* نسجل بأنه في حالة تطابق مستويين من هذه المستويات ، فإن دراسة تقاطع ثلاثة مستويات يعود إلى تقاطع مستويين، و هي الحالة المدروسة سابقا .

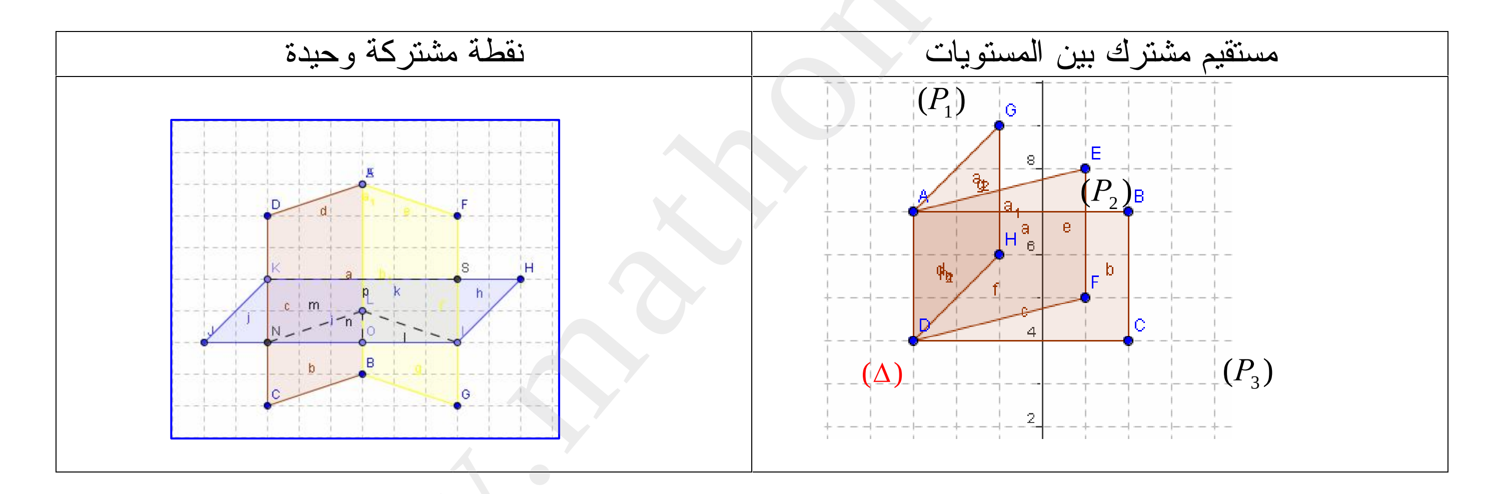
* لهذا نفرض المستويات الثلاثة مختلفة مثنى مثنى. من أجل تعيين تقاطع هذه المستويات الثلاثة ، نحدد في البداية التقاطع $(P_1)\cap(P_2)$ للمستويين (P_1) ، (P_2)، **ثم** نقاطع بين $(P_1)\cap(P_2)$ و (P_3) (حسب ما سبق)

* الحالات المختلفة ملخصة في الجدول التالي :

لا توجد أي نقطة مشتركة بين المستويات الثلاثة



نقطة مشتركة وحيدة	مستقيم مشترك بين المستويات



* (P_1) ، (P_2) ، (P_3) ثلاث مستويات من الفضاء معادلاتهم على الترتيب هي $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ و $a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$

*دراسة تقاطع المستويات الثلاثة ، يعود إلى حل الجملة التالية:

$$(S)\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\\a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0\end{cases}$$

تقاطع (P_1) ، (P_2) ، (P_3)	مجموعة حلول الجملة (S)
لا توجد أي نقطة مشتركة	مجموعة خالية
نقطة مشتركة وحيدة I	ثنائية وحيدة هي إحداثيات I
مستقيم (Δ) ((Δ) معرف بواسطة معادلتين من المعادلات الثلاث)	كل الثنائيات (x;y:z) حلول الجملة ، مشكلة من جملة المعادلتين المعرفتين للمستقيم (Δ)
مستو (في حالة (P_1) = (P_2) = (P_3))	كل الثنائيات (x;y:z) ، التي تحقق أحد المعادلات الثلاث